РЕШЕНИЯ НА ТЕМАТА ЗА 4 КЛАС

4.1. Разглеждаме трицифрените числа, които могат да се представят като сума на две събираеми, едното от които, увеличено 4 пъти, е равно на другото, намалено 2 пъти. Числото 225 е едно такова число, защото $225 = 25 + 200$ и $25.4 = 200 : 2$.

а) Да се докаже, че числото 918 е такова число.

б) Да се намери броят на всички такива числа, които са по-малки от стойността на израза $3.(6.54 - 6.36 - 36)$.

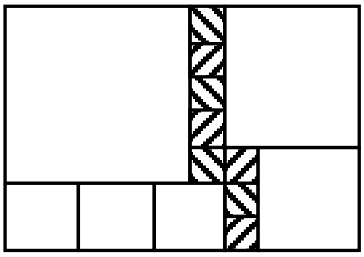
Решение: а) Нека 918 се представя като сума на две събираеми и по-малкото събираемо е a. Тогава другото събираемо трябва да е $8a$, защото $4a = (8a):2$ (**2 точки**). Имаме $a + 8a = 918$, т.е. $9a = 918$ и оттук $a = 102$. Второто събираемо е $8.102 = 816$ (**1 точка**). Получаваме, че $918 = 102 + 816$ и следователно числото 918 е с исканото свойство.

б) $3.(6.54 - 6.36 - 36) = 3.((54 - 36).6 - 36) =$

$= 3.(18.6 - 36) = 3.(108 - 36) = 3.72 = 216$ (**1 точка**).

От решението на а) следва, че търсените числа са от вида $9a$, т.е. те се делят на 9 (**1 точка**). Най-малкото трицифрено число, което се дели на 9, е 108. Задачата се свежда до преброяване на всички трицифрени числа, които са по-малки от 216 и се делят на 9. Тъй като $12.9 = 108$, то 108 е дванадесетото поред число, което се дели на 9. От друга страна $216 : 9 = 24$ и 216 е двадесет и четвъртото поред число, което се дели на 9 (**1 точка**). Търсеният брой е $23 - 11 = 12$ (**1 точка**).

4.2. Правоъгълникът от чертежа е разделен на 14 квадрата. Обиколката на защрихованата фигура е 36 см.



а) Намерете обиколката на правоъгълника.

б) Намерете дължината на направените разрези при разрязване на правоъгълника на тези 14 квадрата.

в) Колко правоъгълника има общо на чертежа?

Решение: а) Ако a е дължината на страната на най-малкия квадрат, то обиколката на фигурата е $18a$ и от равенството $18a = 36$ намираме $a = 2$ см (**1 точка**). Дължините на страните на правоъгълника са $7a = 14$ см и $10a = 20$ см. Следователно търсената обиколка е $2(14 + 20) = 2.34 = 68$ см (**1 точка**).

б) Дължината на направените разрези е $35a = 70$ см (**3 точки**) .

в) Броят на правоъгълниците е 40 (**2 точки**). Освен даденият и получените от него чрез разрязване 14 квадрата (квадратите са също и правоъгълници), т.е. общо 15, на чертежа има още:

7 с размери 1×2; 4 с размери 1×3; 2 с размери 1×4; 1 с размери 1×5;

1 с размери 2×3; 2 с размери 2×4; 1 с размери 2×5; 1 с размери 2×6; 1 с размери 2×7;

1 с размери 3×4; 1 с размери 5×4; 1 с размери 6×5, 1 с размери 4×7, 1 с размери 6×7.

<u>*Забележка*</u>. При изброяване на размерите сме приели, че a е единична отсечка. За пропускане на някой от видовете се отнемат части от точката. При наличие на верен отговор не се отнемат точки.

4.3. Дядо има трима внуци. Сега годините на дядо са 18 пъти повече от годините на най-малкия внук и 6 пъти повече от годините на средния внук. Ако увеличим годините на най-големия внук с 2, умножим получения сбор по 5 и към произведението прибавим годините на средния внук, ще получим най-голямото двуцифрено нечетно число с различни цифри. Намерете годините на дядо и тримата му внуци, ако средният внук е на четен брой години.

Решение: Най-голямото двуцифрено нечетно число с различни цифри е 97 (**1 точка**). Нека средният внук е на x години. От условието имаме следната верижка:

$$\square \xrightarrow{+2} \square \xrightarrow{.5} \square \xrightarrow{+x} \boxed{97}$$ (**1 точка**).

От нея се вижда, че числото $97-x$ се дели на 5. Но едно число се дели на 5, ако завършва на 0 или на 5 (**1 точка**). Заключаваме, че числото $97-x$ завършва на 2 или на 7. По условие x е четно и следователно завършва на 2 (**1 точка**). Нека $x=2$. Тогава дядо е на $6.2=12$ години. Като се движим по обратния път на верижката, тя придобива вида:

$$\boxed{17} \xrightarrow{+2} \boxed{19} \xrightarrow{.5} \boxed{95} \xrightarrow{+2} \boxed{97},$$

т.е. най-големият внук е на 17 години. Но той не може да е по-млад от дядо, който е на 12 години. Така, случаят $x=2$ отпада (**1 точка**). Невъзможността на този случай следва и от факта, че 12 не може да се раздели на 18. Нека $x = 12$ и дядо е на $6.12 = 72$ години. За верижката получаваме:

$$\boxed{15} \xrightarrow{+2} \boxed{17} \xrightarrow{.5} \boxed{85} \xrightarrow{+12} \boxed{97},$$

т.е. най-големият внук е на 15 години. За годините на най-малкия внук имаме $72 : 18 = 4$. Така дядо и тримата внуци са съответно на 72, 4, 12 и 15 години (**1 точка**). Нека $x = 22$. Сега дядо е на $6.22 = 132$ години и от верижката

$$\boxed{13} \xrightarrow{+2} \boxed{15} \xrightarrow{.5} \boxed{75} \xrightarrow{+22} \boxed{97}$$

получаваме, че най-големият внук е на 13 години. Но не е възможно най-големият внук да е по-малък от средния. Случаят отпада. По същия начин ще отпаднат и останалите възможности за x, защото действията във верижката са само събиране и умножение, крайният резултат е един и същ и при увеличаване стойността на последното събираемо (прибавяме възрастта на средния внук) стойността на началното число ще намалява (**1 точка**). Окончателният отговор на задачата е 72, 4, 12 и 15.

Забележка. Пълно доказателство по описания или по друг начин, че x завършва на 2, се оценява с **4 точки**. За всеки от трите случая по **1 точка**, но ако липсват разсъждения, че по-нататъшните проверки не са необходими, се отнема **1 точка** от тези общо **3 точки** за втората част на решението. Съображения от рода, че един дядо не може да е на 12, на 132 или на повече години, не са математически и не следва да се оценяват. Условието на задачата моделира ситуация, която може да се случи с други живи същества и не задължително на планетата Земя.

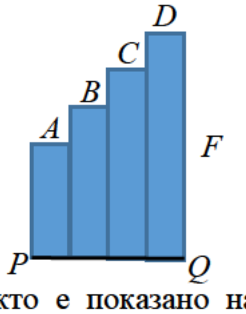
РЕШЕНИЯ НА ТЕМАТА ЗА 5 КЛАС

5.1. Четири хартиени ленти A, B, C и D, съответно с размери: A (**1 см на 3 см**), B (**1 см на 4 см**), C (**1 см на 5 см**) и D (**1 см на 6 см**), са подредени в някакъв ред върху отсечката PQ с дължина 4 см. Лентите са плътно една друга и не се застъпват.

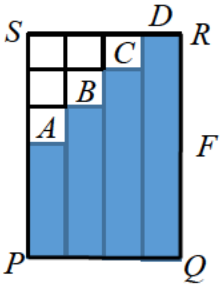
а) Намерете обиколката на фигурата F от чертежа.

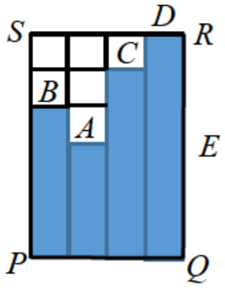
б) По описания начин подредете лентите върху отсечката PQ така, че да образуват фигура E с обиколка 22 см.

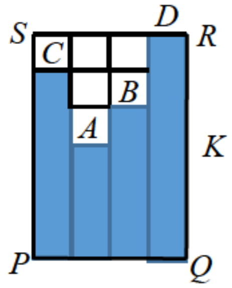
в) По описания начин подредете лентите върху отсечката PQ така, че да образуват фигура K с обиколка 24 см.



Решение: Да „опаковаме“ фигурата F с правоъгълника $PQRS$, както е показано на първия чертеж. Разделяме правоъгълника $PQRS$ на единични квадратчета. Сега лесно установяваме, че обиколката на F е $6+4+6+4=20$ см (**2 точки**). С помощта на правоъгълника $PQRS$ получаваме фигурата E с обиколка 22 см (**2 точки**) и фигурата K с обиколка 24 см (**3 точки**).







5.2. Решете ребуса ДЪБ + ДЪБ + ДЪБ +.....+ ДЪБ = ГОРА, ако броят на думите „ДЪБ“ е възможно най-голям. (На еднаквите букви отговарят еднакви цифри, а на различните букви отговарят различни цифри.)

Решение: Ясно е, че ГОРА $\le$ 9876 и ДЪБ $\ge$ 102 (**1 точка**). Тъй като $97.102=9894>9876$, то броят на думите ДЪБ е не повече от 96 (**1 точка**). От друга страна $96.102=9792$ (цифрата 9 се повтаря) и $96.103=9888$ (сега цифрата 8 е използвана повече от веднъж, а освен това 9888 > 9876). Следователно броят на думите ДЪБ е не повече от 95 (**2 точки**). Имаме $95.102=9690$ и този случай отпада, защото цифрата 9 се повтаря. В същото време $95.103=9785$ (**2 точки**) и тъй като $95.104=9880>9876$, задачата има единствено решение ДЪБ = 103 и ГОРА = 9785 (**1 точка**).

5.3. Пенчо харесвал числата, които се записват само с цифрите 0, 1, 2 и 5, защото с тяхна помощ се означават стойностите на всички действащи банкноти и монети. Пенчо започнал да записва всички такива числа, като ги подреждал по големина. Ето как изглеждало началото на неговия запис: 0, 1, 2 , 5, 10, 11, 12, 15, 20, 21, 22, 25, 50, 51, 52, 55, 100, . . . Да се намери под кой номер е записано числото 2015 и кое число е записано на 2015-о място.

Решение: Имаме 4 едноцифрени числа, които можем да си мислим за двуцифрени с първа цифра 0. След нулата в тези числа последователно се изписват 0, 1, 2 и 5. Първата цифра 0 последователно се заменя с 1, 2 и 5, като по този начин получаваме още 3 четворки числа. Така, броят на едноцифрените и двуцифрените числа става 16, т.е. 4 пъти повече отколкото са едноцифрените (**1 точка**). По-нататък, ако числата дотук разглеждаме като трицифрени с добавяне на нула отпред, то след тази нула има 16 числа, после нулата се заменя с 1, след която има нови 16 числа и т.н.. Заключаваме, че трицифрените числа са 4 пъти повече, т. е. те са 16.4 = 64 на брой. Последното трицифрено число 555 има номер 64 (**1 точка**). След него има още 64 числа с първа цифра 1 и понеже числото 15 е 8-ото подред, това означава, че числото 2015 е записано на място с номер $64+64+8=136$ (**1 точка**). Числото 5555 има номер $64.4=256$, а числото 55555 има номер $256.4=1024$ (**1 точка**). Следователно числото 155555 има номер $1024+1024=2048$ (**1 точка**). Трябва да се върнем 33 числа назад и така стигаме до 155152 (**2 точки**), което е търсеното число.

РЕШЕНИЯ НА ТЕМАТА ЗА 6 КЛАС

6.1. Сравнете числата x и y, ако $x=-2{,}45.a$, $y=\frac{(-1)^5.(-2)^4.(-3)^3.(-11)^2}{-2^3.33.402}$, а числото a е равно на стойността на израза:

$$\left(\frac{2014}{2015}+\frac{2015}{2016}\right).\left(\left(\frac{155}{2^5}\right)^{-1}+\frac{2014}{2015}\right)-\frac{2014}{2015}.\left(\frac{2014}{2015}+\frac{2015}{2016}+\frac{6{,}4}{31}\right).$$

Решение: Нека $p=\frac{2014}{2015}$ и $q=\frac{2014}{2015}+\frac{2015}{2016}$. Тогава имаме:

$$a=q.\left(\frac{32}{155}+p\right)-p.\left(q+\frac{32}{155}\right)=\frac{32}{155}q+pq-pq-\frac{32}{155}p=\frac{32}{155}.(q-p)=\frac{32}{155}.\frac{2015}{2016}=\frac{13}{63}.$$

За числата x и y получаваме съответно $x=-2{,}45.\frac{13}{63}=-\frac{91}{180}$ и $y=-\frac{33}{67}$. Сега

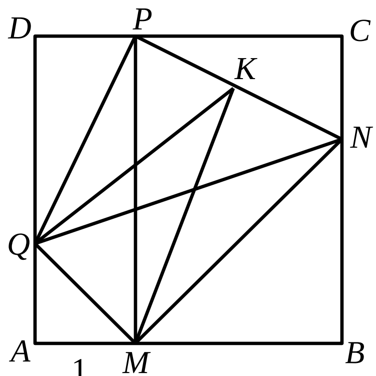
$x=-\frac{91}{180}<-\frac{1}{2}=-\frac{33}{66}<-\frac{33}{67}=y$ следователно $x<y$.

Оценяване: **3 точки** за намиране стойността на a, **1 точка** за x, **2 точки** за y и **1 точка** за сравняване на числата.

6.2. Точките M, N, P и Q са съответно от страните AB, BC, CD и DA на квадрат $ABCD$ така, че $MB=2AM$, $BN=2CN$, $DQ=2AQ$ и $AD \parallel PM$. Ако точка K е среда на отсечката PN, докажете, че:

а) лицата на ΔQMP и ΔNKM са равни;

б) лицето на ΔQKP е по-малко от лицето на ΔQKM.



Решение: а) От условието следва, че фигурата $AMPD$ е правоъгълник и $S_{MBCP}=2S_{AMPD}$. Тогава

$$S_{AMPD}=2S_{QMP} \text{ и } S_{MBCP}=2S_{MNP},$$

откъдето $S_{MNP}=2S_{MQP}$. Но MK е медиана в ΔMNP и следователно $S_{MNP}=2S_{NKM}=2S_{QMP}$, т.е. $S_{NKM}=S_{QMP}$.

б) От а) получаваме $S_{MNK}=\frac{1}{3}S_{MNPQ}=\frac{1}{6}S_{ABCD}$ и следователно е достатъчно да покажем, че $S_{QKP}<\frac{1}{3}S_{MNPQ}=\frac{1}{6}S_{ABCD}$. Но QK е медиана в ΔQNP и $S_{QKP}=\frac{1}{2}S_{NPQ}$. От друга страна $S_{NPQ}=S_{QNCD}-S_{NCP}-S_{PQD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}-\frac{1}{2}CN.CP-\frac{1}{2}PD.DQ$. Ако страната на квадрата е a, то $S_{QKP}=\frac{1}{2}S_{NPQ}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{3}a\right)=\frac{5}{36}a^2<\frac{1}{6}S_{ABCD}$.

Оценяване: **3 точки** за а) съответно по **1 точка** за $S_{MBCP}=2S_{AMPD}$, **1 точка** за $S_{MNP}=2S_{MQP}$ и **1 точка** за $S_{MNP}=2S_{NKM}=2S_{QMP}$; **4 точки** за б), от които **1 точка** за $S_{QKP}<\frac{1}{3}S_{MNPQ}=\frac{1}{6}S_{ABCD}$, **1 точка** за $S_{QKP}=\frac{1}{2}S_{NPQ}$ и **2 точки** за довършване.

6.3. В клетките на правоъгълна таблица с 2 реда и n стълба са разположени различни естествени числа така, че сумите на числата във всеки от редовете е една и съща и сумата на числата във всеки от стълбовете е една и съща. Намерете възможно най-малката сума на числата в таблицата, ако:

а) $n=3$; б) $n=5$

Решение: Да означим сумата на числата в таблицата с S, а еднаквите суми на числата по редове и по стълбове съответно с a и b.

а) Ясно е, че $S\geq 1+2+3+4+5+6=21$. От условието $2a=3b=S$ следва, че S се дели на 2 и на 3, а следователно и на 6. Тъй като търсим възможно най-малката стойност на S, първата възможност е $S=24$. Тогава $a=12$ и $b=8$. Числото 8 се представя като сума на две различни естествени числа по следните начини: $1+7=2+6=3+5$. Намерените двойки са числата по стълбовете на таблицата и остава да ги комбинираме така, че сумите по редове да са равни на 12. Единствената възможност за 7 е да се комбинира с 2 и 3. Така получаваме таблицата

7	2	3
1	6	5

която изпълнява условията на задачата.

б) Сега $S\geq 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$ и от условието $2a=5b=S$ следва, че S се дели на 2 и на 5, а следователно и на 10. Тъй като търсим възможно най-малката стойност на S, първата възможност е $S=60$. Тогава $a=30$ и $b=12$. Числото 12 се представя като сума на две различни естествени числа по следните начини: $1+11=2+10=3+9=4+8=5+7$. Възможностите са само 5 и следователно с тях следва да се съставят петте стълба на таблицата. Но тогава във всеки от редовете ще има по две четни и по три нечетни числа. Заключаваме, че сумите по редове са нечетни и няма как да станат равни на 30. Следващата възможност е $S=70$. Сега $a=35$ и $b=14$. Числото 14 се представя като сума на две различни естествени числа по следните начини:

$$1+13=2+12=3+11=4+10=5+9=6+8.$$

От получените шест двойки трябва да изберем пет за попълване на стълбовете на таблицата. Тъй като 35 е нечетно число, то в стълбовете със сигурност трябва да участват трите двойки с нечетни събираеми. Ясно е, че 13 и 11 не могат да участват в един и същи ред на таблицата. Следователно 13 може да се комбинира с 3 и с 5 или с 3 и с 9. Първият случай е невъзможен, защото $13+3+5=21$ и следователно сборът на другите две числа в този ред трябва да е равен на $35-21=14$. Но числото 14 не може да се представи като сума на две различни естествени число, които са от различни двойки измежду посочените по-горе шест двойки. Остава комбинацията на 13 с 3 и с 9. Сега лесно стигаме до една от таблиците:

13	3	9	6	4
1	11	5	8	10

13	3	9	8	2
1	11	5	6	12

Останалите възможни таблици се получават от горните с разместване на стълбовете и редовете.

Оценяване: а) **1 точка** за $S \geq 21$, **1 точка** за намиране на $a = 12$ и $b = 8$, **1 точка** за пример; б) **1 точка** за $a = 30$ и $b = 12$, **1 точка** за отхвърляне на $S = 60$, **1 точка** за намиране на възможностите при $S = 70$ и **1 точка** за който и да е от двата примера.

РЕШЕНИЯ НА ТЕМАТА ЗА 7 КЛАС

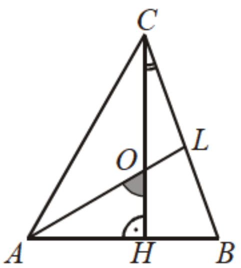
7.1. Вертолет излетял от град A за град B в 10 часà сутринта и след престой от 40 min в B тръгнал обратно. На връщане изминал $\frac{1}{3}$ от разстоянието със скоростта, с която се движил на отиване, а останалата част от пътя изминал с 25% по-голяма скорост. Вертолетът се върнал в A в 16 ч. 16 мин. Намерете за колко време е изминал разстоянието на отиване.

Решение: Нека на отиване скоростта е v km/h, а времето е x h. Тогава разстоянието от A до B е vx km (**1 точка**). Времето, за което е изминато $\frac{1}{3}$ от разстоянието на връщане, е $\frac{1}{3}x$ h. Скоростта, с която е изминато $\frac{2}{3}$ от разстоянието на връщане, е $\frac{5}{4}v$ (**1 точка**), а времето за това е $\frac{2}{3}vx:\left(\frac{5}{4}v\right)=\frac{8}{15}x$ (**1 точка**). Вертолетът излетял от град A за град B в 10 часà сутринта, имал е престой от 40 min и се върнал в A в 16 часа 16 минути. Следователно времето за движение е 5 h 36 min (**1 точка**). Така съставяме уравнението $x+\frac{1}{3}x+\frac{8}{15}x=\frac{28}{5}$ (**2 точки**), откъдето получаваме, че на отиване разстоянието е изминато за 3 h (**1 точка**).

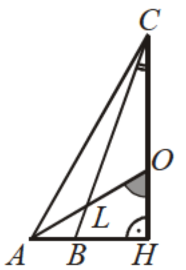
7.2. $CH\left(H \in AB\right)$ е височина в $\triangle ABC$, $AL\left(L \in BC\right)$ е ъглополовяща и $\sphericalangle BCH = 20°$. Правите CH и AL сключват ъгъл $60°$. Намерете ъглите на $\triangle ABC$.

Решение: Нека правите CH и AL се пресичат в точка O.

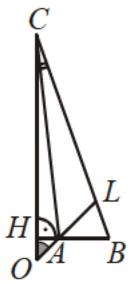
<u>I случай</u>. Точката H е вътрешна за страната AB. Тогава $\sphericalangle AOH = 60°$ (фиг. 1). От правоъгълния триъгълник AOH получаваме, че $\sphericalangle OAH = 30°$. Тъй като AL е ъглополовяща, то $\sphericalangle BAC = 60°$ (**1 точка**) и от правоъгълния $\triangle ACH$ получаваме, че $\sphericalangle ACH = 30°$. Оттук $\sphericalangle ACB = 50°$. Тогава $\sphericalangle ABC = 70°$ (**1 точка**).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

<u>II случай</u>. Точката H е външна за страната AB и B е между A и H (фиг. 2). От правоъгълния $\triangle BCH$ получаваме, че $\sphericalangle CBH = 70°$, а оттук $\sphericalangle ABC = 110°$ като съседен (**1 точка**). Ъгълът между правите CH и AL е $\sphericalangle AOH = 60°$ и от правоъгълния триъгълник AOH получаваме, че $\sphericalangle OAH = 30°$. Тъй като AL е ъглополовяща, то $\sphericalangle BAC = 60°$. Тогава $\sphericalangle ACB = 180° - \left(110° + 60°\right) = 10°$ (**1 точка**).

<u>III случай</u>. Точката H е външна за страната AB и A е между B и H (фиг. 3). Ъгълът между правите CH и AL е $\sphericalangle AOH = 60°$ и от правоъгълния триъгълник AOH получаваме, че $\sphericalangle OAH = 30°$. Тогава $\sphericalangle BAL = \sphericalangle OAH = 30°$ (противоположни ъгли (**1**

точка)). Но AL е ъглополовяща и $\sphericalangle BAC = 60°$ (**1 точка**). Но $\sphericalangle BAC$ е външен за правоъгълния $\triangle ACH$, следователно $\sphericalangle BAC > 90°$. Получаваме противоречие, което показва, че този случай е невъзможен (**1 точка**).

7.3. Нека $p < q < r$ са прости числа, такива че $r = 2q + p$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{623}{pqr}$. Да се намери произведението pqr.

Решение: Лесно се вижда, че трите прости числа са нечетни и $pq + pr + qr = 623$, откъдето $p^2 + 4pq + 2q^2 = 623$ (**1 точка**). Имаме $623 > p^2 + 4p^2 + 2p^2 = 7p^2$, т.е. $p^2 < 89$ или $p \leq 7$. Следователно $p = 3$, 5 или 7 (**3 точки**). Ако $p = 7$, понеже 623 се дели на 7, ще получим, че qr се дели на 7, което е невъзможно (**1 точка**). Нека $p = 3$. Тогава $q^2 + 6q = 307$ или $(q+3)^2 = 316$, което също е невъзможно, защото 316 не е точен квадрат (**1 точка**). Остава $p = 5$. Тогава $q^2 + 10q = 299$, откъдето $(q+5)^2 = 324$ и получаваме $q = 13$, откъдето $r = 2.13 + 5 = 31$. Търсеното произведение е 5.13.31= 2015 (**1 точка**).

РЕШЕНИЯ НА ТЕМАТА ЗА 8 КЛАС

8.1. Нека a, b и c са произволни числа. Да се докаже, че поне едно от числата $(a+b+c)^2 - 9ab$, $(a+b+c)^2 - 9bc$ и $(a+b+c)^2 - 9ca$ е по-голямо или равно на нула.

Решение: Допускаме противното, т.е.

$$(a+b+c)^2 - 9ab < 0,\ (a+b+c)^2 - 9bc < 0 \text{ и } (a+b+c)^2 - 9ca < 0 \ (\textbf{2 точки}).$$

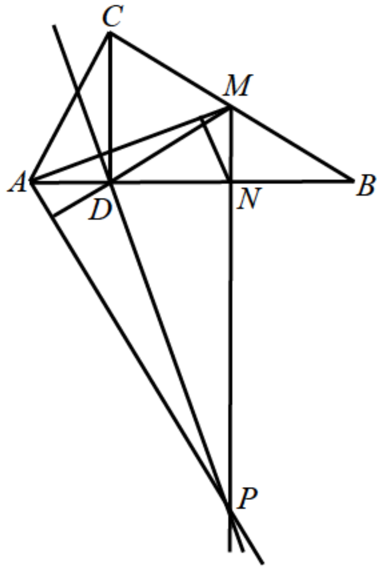
Събираме сега трите неравенства и след извършване на приведение получаваме:

$$3\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right) = (\textbf{2 точки})$$

$$= \frac{3}{2}\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right) < 0,$$

което е противоречие (**3 точки**).

8.2. Даден е ΔABC с медиана AM ($M \in BC$) и височина CD ($D \in AB$). Точка N е среда на отсечката BD, като разстоянието от N до AM е четири по-малко от дължината на AM. Права p през D и перпендикулярна на AM пресича правата MN в точка P, като $\sphericalangle PAD = 60^\circ$. Намерете ъгъла между правите p и AC.



Решение: MN е средна отсечка в ΔDBC и следователно $MN \parallel CD$. Така получаваме, че върху правите p и MN са височините на ΔADM. Следователно точката P е ортоцентър и $AP \perp DM$ (**2 точки**), откъдето $\sphericalangle BDM = 30^\circ$. От правоъгълния ΔBCD следва, че $DM = MB = MC$ и тъй като $\sphericalangle DCM = 60^\circ$, то $DM = CD$ (**1 точка**). Сега ще използваме, че ако в един правоъгълен триъгълник медианата към хипотенузата е два пъти по-дълга от височината към хипотенузата, то острите ъгли в този триъгълник са 15° и 75°. Правоъгълният ΔANM притежава това свойство, защото по условие разстоянието от

N до AM е равно на една четвърт от дължината на AM. Доказването на този факт и заключението, че $\sphericalangle MAN = 15^\circ$ се оценява с **2 точки**. По-нататък имаме $\sphericalangle BDM = 2\sphericalangle MAN$ и тъй като $\sphericalangle BDM$ е външен за ΔAMD, то ΔAMD е равнобедрен, т.е. $AD = DM$. По-горе видяхме, че $DM = CD$ и значи $AD = CD$, т.е. ΔACD е равнобедрен. Оттук $\sphericalangle DAC = 45^\circ$ (**1 точка**). Получаваме, че $\sphericalangle CAM = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$ и следователно търсеният ъгъл е 60° (**1 точка**).

8.3. Нека M е множество от 958 различни числа измежду естествените числа от 1 до 2015. Да се докаже, че в M съществуват две различни числа, сумата на които се дели на 38.

Решение: Нека N е множеството на естествените числа от 1 до 2015. Тъй като $\frac{2015}{38} = 53$ (ост. 1), множеството N може да се разбие на 37 групи с по 53 числа и 1 група с 54 числа, като числата във всяка група имат един и същ остатък при деление на 38, т.е. $N = N_0 \cup N_1 \cup \cdots \cup N_{36} \cup N_{37}$, където N_k $(k = 0, 1, \ldots, 36, 37)$ е подмножеството на N с всички числа от N с остатък k при деление на 38 (**2 точки**). По-нататък да разбием N на четири групи, като в първата група влизат елементите на всички N_k $(k = 1, 2, \ldots, 18)$, във втората група влизат елементите на всички N_{38-k} $(k = 1, 2, \ldots, 18)$, в третата група влизат елементите на N_0, а в четвъртата група влизат елементите на N_{19} (**2 точки**). Нека M е подмножество на N с 958 числа. Ако a и b са такива числа от M, че $a \in N_k$ и $b \in N_{38-k}$, при $k = 1, 2, \ldots, 18$, то $a + b$ се дели на 38 (**1 точка**). Освен това, ако числата a и b принадлежат едновременно на N_0 или на N_{19}, то $a + b$ се дели отново на 38 (**1 точка**). В тези случаи задачата е решена. Затова да допуснем, че елементите на M са само от първата група (или само от втората) и че M съдържа най-много само по един представител от третата и четвъртата група. Но тогава M ще съдържа общо най-много $17.53 + 54 + 2 = 957$ числа и това е противоречие (**1 точка**). Следователно във всяко подмножество M на N с 958 числа със сигурност има две различни числа a и b, за които $a + b$ се дели на 38.

<u>Задачите са предложени, както следва</u>:

4.1. – Велислав Йончев, 4.2. и 4.3. – Петя Тодорова;
5.1. – Емил Карлов, 5.2. – Иван Ангелов, 5.3. – Иван Тонов;
6.1. – Стоят Ненков, 6.2. – Ирина Шаркова, 6.3. – Сава Гроздев и Веселин Ненков
7.1. и 7.2. – Мариана Кьосева, 7.3. – Иван Тонов;
8.1. – Иван Тонов, 8.2. – Ирина Шаркова, 8.3. – Сава Гроздев и Веселин Ненков