Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А И Н А У К А Т А

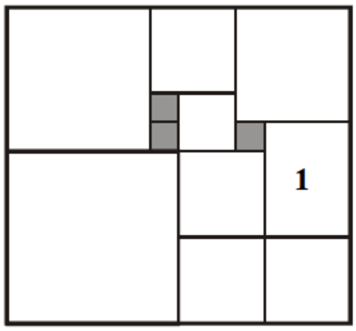
НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 17 април 2010 г.

Т Е М А   З А   4   К Л А С

Задача 1. а) Пресметнете израза: $(118\,178:74+8403):5+10$.

б) Намерете неизвестното число x от равенството: $(239-138:x).6+612=2010$.

Задача 2. Даденият правоъгълник на чертежа е разделен на 12 фигури. Едната от тях е правоъгълник и е означена с 1, а останалите 11 са квадрати. Всяко от трите най-малки квадратчета, които са затъмнени на чертежа, е с дължина на страната 1 *см*. Да се намери лицето на дадения правоъгълник.



Задача 3. Христо отишъл на гости на роднинско семейство, което имало 4 деца. Той попитал на колко години са децата, а бащата му поставил задача да ги открие сам, като използва, че произведението от годините им е равно на 72. Христо извършил известни пресмятания, но не успял да реши задачата. Тогава бащата уточнил, че сборът от годините на четирите деца е равен на годините на Христо. За съжаление Христо отново не бил в състояние да реши задачата и попитал дали някое от децата е на 2 години. Бащата дал отговор на този въпрос и Христо веднага съобщил годините на четирите деца.

Намерете годините на четирите деца и годините на Христо.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успех!

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 4 КЛАС

Задача 1. а) Пресметнете израза: $(118\ 178:74+8403):5+10$.

б) Намерете неизвестното число x от равенството: $(239-138:x).6+612=2010$.

Решение: а) $118\,178:74=1597$ **(1 т.)** $1597+8403=10\ 000$ **(1 т.)**

$10\ 000:5+10=2000+10=2010$ **(1 т.)**

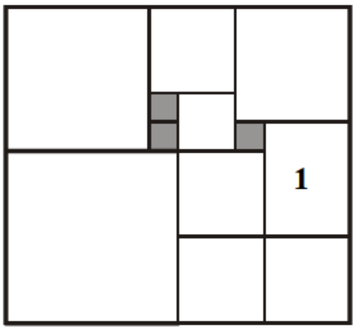
б) $(239-138:x).6=2010-612$ $(239-138:x).6=1398$ **(1 т.)**

$\Rightarrow 239-138:x=1398:6$ $239-138:x=233$ **(1 т.)**

$\Rightarrow 138:x=239-233$ $138:x=6$ **(1 т.)**

$\Rightarrow x=138:6$ $x=23$ **(1 т.)**

Задача 2. Даденият правоъгълник на чертежа е разделен на 12 фигури. Едната от тях е правоъгълник и е означена с 1, а останалите 11 са квадрати. Всяко от трите най-малки квадратчета, които са затъмнени на чертежа, е с дължина на страната 1 *см*. Да се намери лицето на дадения правоъгълник.



Решение: Квадратът вдясно от двете затъмнени квадратчета има страна 2 *см*. **(1 т.)** Квадратът над него има страна 3 *см*, квадратът горе вляво има страна 5 *см*, а този горе вдясно има страна 4 *см*. **(2 т.)** Трите еднакви квадрата в долния десен ъгъл имат страна 3 *см*. **(1 т.)** Следователно квадратът в долния ляв ъгъл има страна 6 *см* **(1 т.)**, а правоъгълникът 1 е със страни 3 *см* и 4 *см*. **(1 т.)** Така получаваме, че страните на дадения правоъгълник са с дължини 12 *см* и 11 *см*, като за лицето му намираме $12.11=132$ *кв. см*. **(1 т.)**

Задача 3. Христо отишъл на гости на роднинско семейство, което имало 4 деца. Той попитал на колко години са децата, а бащата му поставил задача да ги открие сам, като използва, че произведението от годините им е равно на 72. Христо извършил известни пресмятания, но не успял да реши задачата. Тогава бащата уточнил, че сборът от годините на четирите деца е равен на годините на Христо. За съжаление Христо отново не бил в състояние да реши задачата и попитал дали някое от децата е на 2 години. Бащата дал отговор на този въпрос и Христо веднага съобщил годините на четирите деца.

Намерете годините на четирите деца и годините на Христо.

Решение: Възможностите за представяне на 72 като произведение от 4 числа са представени в таблицата:

Първо дете	**Второ дете**	**Трето дете**	**Четвърто дете**	**Сбор**
1	1	1	72	75
1	1	2	36	40
1	1	3	24	29
1	1	4	18	24
1	1	6	12	20

1	1	8	9	19
1	2	2	18	23
1	2	3	12	18
1	2	4	9	16
1	**2**	**6**	**6**	**15**
1	**3**	**3**	**8**	**15**
1	3	4	6	14
2	**2**	**2**	**9**	**15**
2	2	3	6	13
2	3	3	4	12

За установяване на горния резултат **(3 т.)**. Ако годините на Христо не са 15, то отговорът би могъл да се установи съгласно таблицата. Следователно Христо е на 15 години и за годините на четирите деца има 3 възможности. **(2 т.)** Отговорът на въпроса дали някое от децата е на 2 години е отрицателен, защото в противен случай е необходима допълнителна информация (в два от разглежданите три случая има дете на 2 години). Единствената възможност е децата да са на 1, 3, 3 и 8 години. **(2 т.)**

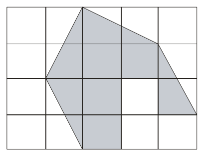
Задачите са предложени, както следва:
зад. 4.1 и зад. 4.2 – Иван Ангелов и Ивайло Старибратов, зад. 4.3 – Сава Гроздев

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А   И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 17 април 2010 г.

Т Е М А   З А   5   К Л А С

Задача 1. Даден правоъгълник с размери 5 *см* и 0,4 *дм* е разделен на единични квадратчета. Каква част от правоъгълника е затъмнена?

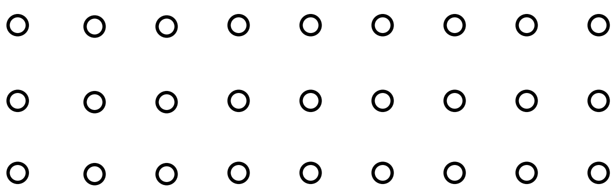


Задача 2. Намерете възможно най-голямата и възможно най-малката стойност на израза

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}+\frac{g}{h}+\frac{l}{m},$$

където a, b, c, d, e, f, g, h, l и m са различни цифри.

Задача 3. Цветна леха съдържа 27 рози, част от които са червени, а останалите са жълти. Лехата е с формата на правоъгълник, като разстоянията между съседните рози на трите реда и деветте колони са едни и същи.



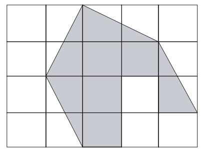
Да се докаже, че съществува правоъгълник, върховете на който са рози с един и същи цвят.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успех!

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 5 КЛАС

Задача 1. Даден правоъгълник с размери 5 *см* и 0,4 *дм* е разделен на единични квадратчета. Каква част от правоъгълника е затъмнена?



Решение: 0,4 *дм* = 4 *см*. **(1 т.)** Лицето на правоъгълника е $5 \times 4 = 20$ *кв. см*. **(1 т.)** Затъмнената част на правоъгълника съдържа 4 единични квадратчета и 4 правоъгълни тръгълника, всеки от които има катети с дължини 2 *см* и 1 *см*. **(2 т.)**. Лицето на един правоъгълен триъгълник с катети 2 *см* и 1 *см* е равно на 1 *кв. см*. **(1 т.)** Общото лице на затъмнената част е $4 + 4.1 = 8$ *кв. см* **(1 т.)**, което е $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ части от правоъгълника. **(1 т.)**

Задача 2. Намерете най-голямата и най-малката възможна стойност на израза

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} + \frac{g}{h} + \frac{l}{m},$$

където a, b, c, d, e, f, g, h, l и m са различни цифри.

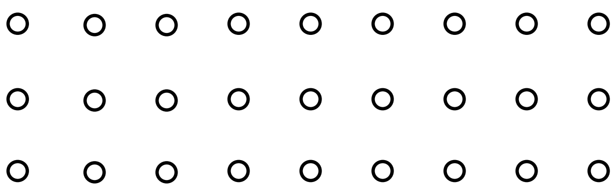
Решение: В израза се използват 10 различни цифри, т.е. използват се всичките цифри от 0 до 9 **(1 т.)**. Числото 0 трябва да е числител на някоя от дробите. **(1 т.)** При търсене на най-голямата стойност останалите 4 числителя трябва да са най-големите цифри, т.е. 9, 8, 7 и 6. **(1 т.)** По-голям сбор се получава, когато на по-голям числител отговаря по-малък знаменател. **(1 т.)** Следователно търсената най-голяма стойност на израза е

$$\frac{9}{1} + \frac{8}{2} + \frac{7}{3} + \frac{6}{4} + \frac{0}{5} = \frac{9.12 + 8.6 + 7.4 + 6.3}{12} = \frac{108 + 48 + 28 + 18}{12} = \frac{202}{12} = \frac{101}{6}.$$ **(1 т.)**

При търсене на най-малката стойност четирите ненулеви числителя трябва да са най-малките ненулеви цифри, т.е. 1, 2, 3 и 4. Освен това, по-малък сбор се получава, когато на по-голям числител отговаря по-голям знаменател. **(1 т.)** Следователно търсената най-малка стойност на израза е

$$\frac{0}{5} + \frac{1}{6} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8} + \frac{4}{9} = \frac{84 + 2.72 + 3.63 + 4.56 =}{504} = \frac{84 + 144 + 189 + 224}{504} = \frac{641}{504}.$$ **(1 т.)**

Задача 3. Цветна леха съдържа 27 рози, част от които са червени, а останалите са жълти. Лехата е с формата на правоъгълник, като разстоянията между съседните рози на трите реда и деветте колони са едни и същи.



Да се докаже, че съществува правоъгълник, върховете на който са рози с един и същи цвят.

Решение:

●	○	●	●	●	○	○	○
●	●	○	●	○	●	○	○
●	●	●	○	○	○	●	○
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

Нека черните кръгчета изобразяват червените рози, а белите кръгчета – жълтите рози. Разполагането на червени рози в една колонка от 3 рози може да стане по 8 различни начина, както е показано. **(2 т.)** Тъй като в цветната леха има 9 колонки, то в поне 2 колонки разположението на червените рози ще бъде едно и също. **(2 т.)** Ако двете еднакви колонки са измежду тези с номера 1, 2, 3 или 4, то ще има правоъгълник, върховете на който са червени рози. **(2 т.)** Ако двете еднакви колонки са измежду тези с номера 5, 6, 7 или 8, то ще има правоъгълник, върховете на който са жълти рози. **(1 т.)**

Задачите са предложени, както следва:
зад. 5.1 и зад. 5.2 – Тони Чехларова, зад. 5.3 – Сава Гроздев

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А   И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 17 април 2010 г.

Т Е М А   З А   6   К Л А С

Задача 1. Фирма "Екосок" пълни два вида опаковки със сок от боровинки и ги продава на една и съща цена. Първият вид има форма на правоъгълен паралелепипед с размери 1 *дм*, 0,5 *дм* и 1,5 *дм*. Вторият вид има форма на триъгълна пирамида с височина 20 *см* и основа правоъгълен триъгълник с катети 15 *см* и 14 *см*. От кой вид е по-изгодно да се купува?

Задача 2. Ани и Борис имат монети само по 1 стотинка и по 10 стотинки. Общо двамата имат между 100 и 200 монети, като Ани има толкова монети по 10 стотинки, колкото Борис има по 1 стотинка. Броят монети по 10 стотинки на Борис представлява 40% от броя монети по 1 стотинка на Ани. Ако Ани изхарчи 75% от парите си, ще й остане сума, равна на сумата на Борис. Колко монети по 1 стотинка има Борис?

Задача 3. Докажете, че:

а) числата $1+3^2+3^4$ и $1+3^2+3^4+3^6$ са взаимно прости;

б) сумата $1+3^2+3^4+\ldots+3^{42}+3^{44}+3^{46}$ се дели на числото 533.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.

Пожелаваме Ви успех!

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 6 КЛАС

Задача 1. Фирма "Екосок" пълни два вида опаковки със сок от боровинки и ги продава на една и съща цена. Първият вид има форма на правоъгълен паралелепипед с размери 1 *дм*, 0,5 *дм* и 1,5 *дм*. Вторият вид има форма на триъгълна пирамида с височина 20 *см* и основа правоъгълен триъгълник с катети 15 *см* и 14 *см*. От кой вид е по-изгодно да се купува?

Решение:

Обемът на опаковките от първия вид е $V_1 = 1.0,5.1,5 = 0,75$ *куб. дм* = 750 *куб. см*. **(3 т.)**

Обемът на опаковките от втория вид е $V_2 = \frac{15.14.20}{6} = 700$ *куб. см*. **(3 т.)**

По-изгодна е покупката на сокове от първия вид, защото $V_1 > V_2$. **(1 т.)**

Задача 2. Ани и Борис имат монети само по 1 стотинка и по 10 стотинки. Общо двамата имат между 100 и 200 монети, като Ани има толкова монети по 10 стотинки, колкото Борис има по 1 стотинка. Броят монети по 10 стотинки на Борис представлява 40% от броя монети по 1 стотинка на Ани. Ако Ани изхарчи 75% от парите си, ще й остане сума, равна на сумата на Борис. Колко монети по 1 стотинка има Борис?

Решение: Тъй като 40% представлява $\frac{2}{5}$, то броят монети по 1 стотинка на Ани е кратен на 5. **(1 т.)** Нека Ани има x монети по 10 ст. и $5y$ монети по 1 ст. (x и y са естествени числа). Сумата на Ани е $A = (10x + 5y)$ ст. **(1 т.)** Тогава Борис има $2y$ монети по 10 ст. и x монети по 1 ст. Общата му сума е $B = (20y + x)$ ст. **(1 т.)** От условието следва, че сумата на Борис е 25% от тази на Ани, т.е. $4B = A$. **(1 т.)** Тогава $80y + 4x = 10x + 5y$, откъдето $75y = 6x$ или $25y = 2x$. **(1 т.)** Дясната страна на последното равенство е четно число и следователно $y = 2k$ за някое цяло число k. Тогава $x = 25k$. Общият брой монети е $25k + 5.2k + 2.2k + 25k = 64k$ и тъй като $100 < 64k < 200$, то $k = 2$ или $k = 3$. **(1 т.)** И в двата случая условията на задачата са изпълнени. И така, за монетите по 1 ст. на Борис получаваме два възможни отговора: $x = 25.2 = 50$ или $x = 25.3 = 75$. **(1 т.)**

Задача 3. Докажете, че:

а) числата $1 + 3^2 + 3^4$ и $1 + 3^2 + 3^4 + 3^6$ са взаимно прости;

б) сумата $1 + 3^2 + 3^4 + \ldots + 3^{42} + 3^{44} + 3^{46}$ се дели на числото 533.

Решение: а) Тъй като $1 + 3^2 + 3^4 = 91 = 7.13$ и

$$1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 = \left(1 + 3^2\right) + 3^4\left(1 + 3^2\right) = 10.\left(1 + 3^4\right) = 2^2.5.41,$$

числата нямат общ делител и следователно са взаимно прости. **(2 т.)**

б) Сумата групираме по два начина. Най-напред по тройки: **(2 т.)**

$$1+3^2+3^4+\ .\ .\ .\ +3^{42}+3^{44}+3^{46}=$$
$$=\left(1+3^2+3^4\right)+3^6\left(1+3^2+3^4\right)+\ .\ .\ .\ +3^{42}\left(1+3^2+3^4\right)=$$
$$=\left(1+3^2+3^4\right)\left(1+3^6+\ .\ .\ .\ +3^{42}\right)=$$
$$=13.7.\left(1+3^6+\ .\ .\ .\ +3^{42}\right)$$

След това по четворки: **(2 т.)**

$$1+3^2+3^4+\ .\ .\ .\ +3^{42}+3^{44}+3^{46}=$$
$$=\left(1+3^2+3^4+3^6\right)+3^8\left(1+3^2+3^4+3^6\right)+\ .\ .\ .\ +3^{40}\left(1+3^2+3^4+3^6\right)=$$
$$=\left(1+3^2+3^4+3^6\right)\left(1+3^8+\ .\ .\ .\ +3^{40}\right)=$$
$$=41.20.\left(1+3^8+\ .\ .\ .\ +3^{40}\right)$$

Разлагаме на прости множители $533=41.13$. От двете представяния следва, че сумата $1+3^2+3^4+\ .\ .\ .\ +3^{42}+3^{44}+3^{46}$ се дели на 13 и на 41. Но числата 13 и 41 са взаимно прости. Следователно сумата се дели и на тяхното произведение, т.е. на 533. **(1 т.)**

Задачите са предложени, както следва:
зад. 6.1 и зад. 6.3 – Ирина Шаркова, зад. 6.2 – Ивайло Кортезов

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А   И   Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 17 април 2010 г.

Т Е М А   З А   7   К Л А С

Задача 1. Две машини с еднаква производителност могат да изпълнят половината от една поръчка за 2 часа и 30 минути, ако работят заедно. Едната от тях била заменена с нова машина, чиято производителност била с 50% по-голяма. За колко часа новата машина и една от старите машини ще изпълнят поръчката, ако работят заедно? Колко процента от цялата поръчка ще изпълни всяка от машините?

Задача 2. Даден е равнобедрен триъгълник ABC ($AC = BC$), в който $\sphericalangle ACB = 80^\circ$. Точка M е такава, че $\sphericalangle MAB = 10^\circ$ и $\sphericalangle MBA = 30^\circ$. Да се намери $\sphericalangle AMC$.

Задача 3. Да се намери най-малкото естествено число n, за което числото $2n^3 + 3n^2 - 1$ се дели на 2010.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

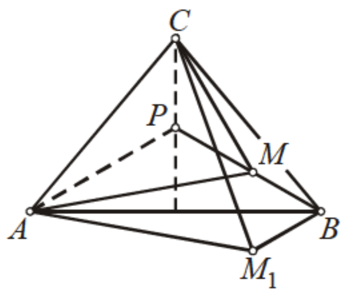
Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успех!

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 7 КЛАС

Задача 1. Две машини с еднаква производителност могат да изпълнят половината от една поръчка за 2 часа и 30 минути, ако работят заедно. Едната от тях била заменена с нова машина, чиято производителност била с 50% по-голяма. За колко часа новата машина и една от старите машини ще изпълнят поръчката, ако работят заедно? Колко процента от цялата поръчка ще изпълни всяка от машините?

Решение: След като двете машини заедно свършват половината работа за 2 часа и 30 минути, те ще свършат цялата работа за 5 часа. Но двете машини са с еднаква производителност и следователно едната от тях би свършила работата сама за два пъти повече време, т.е. за 10 часа. Оттук намираме, че производителността на всяка от машините е $\frac{1}{10}$. **(2 т.)** Производителността на новата машина е с 50% по-голяма т.е. тя е $\frac{1}{10}+\frac{1}{2}.\frac{1}{10}=\frac{3}{20}$. **(2 т.)** Ако една от старите и новата машина свършват работата за t часа, то $\frac{1}{10}.t+\frac{3}{20}.t=1 \Leftrightarrow 5t=20 \Rightarrow t=4$. **(2 т.)** Старата машина извършва $\frac{1}{10}.4=\frac{4}{10}$ от работата, т.е. 40%, а новата – 60%. **(1 т.)**

Задача 2. Даден е равнобедрен триъгълник ABC ($AC=BC$), в който $\sphericalangle ACB=80^\circ$. Точка M е такава, че $\sphericalangle MAB=10^\circ$ и $\sphericalangle MBA=30^\circ$. Да се намери $\sphericalangle AMC$.



Решение: Нека M е вътрешна точка и MB пресича височината през върха C в точка P. **(1 т.)** Тъй като $\sphericalangle ACB=80^\circ$, то $\sphericalangle ABC=\sphericalangle BAC=50^\circ$. От $\sphericalangle MAB=10^\circ$ и $\sphericalangle MBA=30^\circ$ следва, че $\sphericalangle AMP=40^\circ$ и $\sphericalangle MAC=40^\circ$. **(1 т.)** Тъй като ΔABC е равнобедрен, височината през C е и симетрала на AB, т.е. $AP=BP$. Следователно $\sphericalangle BAP=\sphericalangle ABM=30^\circ$, откъдето $\sphericalangle MAP=20^\circ$. Тогава $\sphericalangle CAP=40^\circ-20^\circ=20^\circ$, т.е. $\sphericalangle CAP=\sphericalangle MAP$. **(1 т.)** Освен това $\sphericalangle ACP=\sphericalangle BCP=40^\circ$. Следователно $\Delta APC\cong\Delta APM$ (II пр.). Оттук $AM=AC$. **(1 т.)** Сега намираме, че $\sphericalangle AMC=70^\circ$. **(1 т.)**

Ако M_1 е външна точка, то $\Delta AMB\cong\Delta AM_1B$ (II пр.) и $AM_1=AM=AC$. Тъй като $\sphericalangle M_1AC=60^\circ$, то ΔM_1AC е равностранен и $\sphericalangle AM_1C=60^\circ$. **(2 т.)**

Задача 3. Да се намери най-малкото естествено число n, за което числото $2n^3+3n^2-1$ се дели на 2010.

Решение: Имаме

$$2n^3+3n^2-1=2n^3+2n^2+n^2-1=2n^2(n+1)+(n-1)(n+1)=(n+1)(2n^2+n-1)=$$

$$=(n+1)(n^2+n+n^2-1)=(n+1)^2(2n-1).\ \textbf{(1 т.)}$$

Тъй като $2010=2.3.5.67$, то поне едно от числата $n+1$ и $2n-1$ трябва да се дели на 67. Да разгледаме двете възможности. Нека $n+1$ е кратно на 67. Тогава $n=67k-1$ за някое естествено число k. **(1 т.)** Получаваме, че $(n+1)^2(2n-1)=67^2k^2(134k-3)$. За да е изпълнена исканата делимост, трябва $k^2(134k-3)$ да се дели на 30. Числото $134k-3$ е нечетно и се дели на 3 точно когато k се дели на 3. Ето защо k трябва да се дели на 6.

(1 т.) Ако $k = 6$, то $k^2(134k - 3)$ не се дели на 5. При $k = 12$ исканата делимост е изпълнена. Получаваме, че в разглеждания случай най-малкото число, което търсим, е $n = 67.12 - 1 = 803$. **(1 т.)**

Нека сега на 67 се дели числото $2n - 1$. Тогава можем да запишем, че $2n - 1 = 67m$ за някое естествено число m. Ясно е, че m е нечетно и получаваме $2n - 1 = 67(2l - 1)$, откъдето $n = 67l - 33$, където l естествено число. **(1 т.)** Оттук $(n+1)^2(2n-1) = 67(67l - 32)^2(2l - 1)$ и за да е изпълнено исканото, трябва $(2l-1)(67l-32)^2$ да се дели на 30. Тъй като $2l - 1$ е нечетно, за да имаме делимост на 2, трябва l да е четно. Освен това $2l - 1 + 67l - 32 = 69l - 33 = 3(23l - 11)$ и заключаваме, че $2l - 1$ и $67l - 32$ едновременно се делят или не се делят на 3. Следователно делимост на 6 ще имаме точно когато l дава остатък 2 при деление на 6. **(1 т.)** При $l = 2$ нито един от множителите $2l - 1$ и $67l - 32$ не се дели на 5. При $l = 8$ делимостта на 5 е изпълнена и намираме $n = 503$. Тъй като 503 < 803, търсеното n е 503. **(1 т.)**

Задачите са предложени, както следва:
зад. 7.1 и зад. 7.2 – Теодоси Витанов, зад. 7.3 – Светлозар Дойчев

Р Е П У Б Л И К А Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 17 април 2010 г.

Т Е М А З А 8 К Л А С

Задача 1. Дадено е неравенството $3|x-a| \le 2x+2$, където a е параметър.

а) Да се реши неравенството при $a=-1$.

б) Да се намерят стойностите на параметъра a, за които множеството от решения на неравенството съдържа само от едно цяло число.

Задача 2. Върху хипотенузата AB на равнобедрен правоъгълен триъгълник ABC е взета произволна точка M. Точките G_1 и G_2 са медицентровете съответно на триъгълниците AMC и BMC. Да се докаже, че $\angle G_1CG_2 > 45^\circ$.

Задача 3. Да се намерят всички цели положителни числа n, за които числото n^5+3n+4 е степен на числото 2.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.

Пожелаваме Ви успех!

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 8 КЛАС

Задача 1. Дадено е неравенството $3|x-a| \le 2x+2$, където a е параметър.

а) Да се реши неравенството при $a=-1$.

б) Да се намерят стойностите на параметъра a, за които множеството от решения на неравенството съдържа само от едно цяло число.

Решение: а) При $2x+2<0$, т.е. при $x<-1$, неравенството няма решение.

При $-1 \le x$ имаме $3|x+1| \le 2x+2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3(x+1) \le 2x+2 \\ -2x-2 \le 3(x+1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge -1 \end{array} \right.$.

Следователно при $a=-1$, решението на неравенството е $x=-1$. **(1 т.)**

б) Неравенството има решение при $2x+2 \ge 0$, т.е. при $x \ge -1$. При $x \ge -1$ имаме

$$3|x-a| \le 2x+2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3(x-a) \le 2x+2 \\ 3(x-a) \ge -2x-2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \le 3a+2 \\ x \ge \dfrac{3a-2}{5} \end{array} \right. . \textbf{ (1 т.)}$$

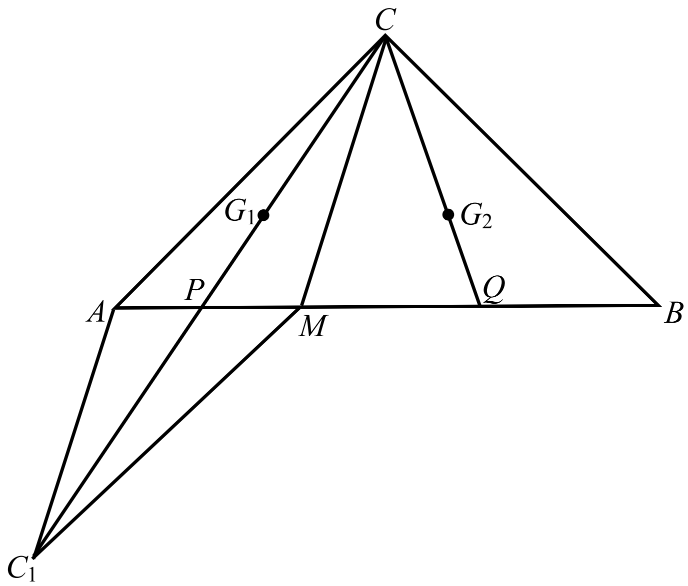
За да има неравенството решение, е необходимо $-1 \le 3a+2$, откъдето получаваме $a \ge -1$. Тъй като при $a \ge -1$ имаме $-1 \le \frac{3a-2}{5} \le 3a+2$, то решението е интервалът $\left[\frac{1}{5}(3a-2); 3a+2\right]$. **(1 т.)**

Нека m е цяло число. То ще бъде единственото цяло решение на неравенството, когато $m-1 < \frac{1}{5}(3a-2) \le m \le 3a+2 < m+1$. **(1 т.)** Оттук получаваме $\frac{5m-3}{3} < a \le \frac{5m+2}{3}$ и $\frac{m-2}{3} \le a < \frac{m-1}{3}$. **(1 т.)**. От условието $\frac{5m-3}{3} < \frac{m-1}{3}$ следва, че $m < \frac{1}{2}$, а от $\frac{m-2}{3} \le \frac{5m+2}{3}$ получаваме $m \ge -1$, т.е. $m=-1$ или $m=0$. **(1 т.)** При $m=-1$ имаме $a \le -1$ и $a \ge -1$, т.е. $a=-1$. При $m=0$ имаме $-1 < a \le \frac{2}{3}$ и $-\frac{2}{3} \le a < -\frac{1}{3}$, т.е. $a \in \left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **(1 т.)**

Окончателно неравенството има само едно цяло решение при $a=-1$ и $a \in \left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Задача 2. Върху хипотенузата AB на равнобедрен правоъгълен триъгълник ABC е взета произволна точка M. Точките G_1 и G_2 са медицентровете съответно на триъгълниците AMC и BMC. Да се докаже, че $\angle G_1CG_2 > 45^\circ$.

Решение: Нека точките P и Q са средите съответно на отсечките AM и BM. Тъй като $G_1 \in CP$ и $G_2 \in CQ$, то $\angle G_1CG_2 = \angle PCQ$. **(1 т.)** От друга страна $\angle AMC + \angle BMC = 180^\circ$ и следователно поне един от тези два ъгъла не е остър, т.е. поне един от тези два ъгъла е най-големият в съответния триъгълник AMC или BMC. **(1 т.)** Заключаваме, че отсечката CM е по-малка от бедрата на ΔABC. **(1 т.)** Върху продължението на CP да построим точката C_1 така, че P да е средата на CC_1. **(1 т.)** Тогава четириъгълникът



$ACMC_1$ е успоредник и оттук $\angle PCM = \angle PC_1A$. **(1 т.)** Но в триъгълника ACC_1 имаме $AC_1 = CM < AC \Rightarrow \angle ACP < \angle PC_1A \Rightarrow \angle ACP < \angle PCM$. **(1 т.)** По същия начин доказваме, че $\angle QCM > \angle BCQ$, откъдето

$$\angle PCM + \angle QCM > \angle ACP + \angle BCQ \Rightarrow \angle PCQ > 90° - \angle PCQ \Rightarrow \angle PCQ > 45°.$$ **(1 т.)**

Задача 3. Да се намерят всички цели положителни числа n, за които числото n^5+3n+4 е степен на числото 2.

Решение: Имаме:

$$n^5+3n+4 = n^5+3n+3+1 = n^5-n^3+n^3+1+3n+3 =$$
$$n^3(n-1)(n+1)+(n+1)(n^2-n+1)+3(n+1) = (n+1)(n^4-n^3+n^2-n+4).$$ **(1 т.)**

От полученото разлагане следва, че числата $n+1$ и $n^4-n^3+n^2-n+4$ трябва да са едновременно степени на числото 2, защото са по-големи от 1. **(1 т.)**

Нека $n+1=2^k$ и $n^4-n^3+n^2-n+4=2^m$ за някакви естествени числа k и m. Тъй като $n^4-n^3+n^2-n+4-(n+1) = n^4-n^3+2+(n-1)^2 > 0$, то $m > k$. **(1 т.)**

Но тогава от $n \equiv -1 \left(\bmod 2^k\right)$ ще следва, че $n^4-n^3+n^2-n+4 \equiv 8 \left(\bmod 2^k\right)$. **(1 т.)**

От друга страна, $n^4-n^3+n^2-n+4 = 2^m \equiv 0 \left(\bmod 2^k\right)$ и получаваме, че 2^k трябва да дели 8, а това е възможно само ако $k \le 3$. **(1 т.)**

При $k=1, 2$ и 3 намираме съответно $n=1, 3$ и 7. **(1 т.)**

При $n=1$ числото n^5+3n+4 е равно на 8 и това е решение на задачата. При $n=3$ числото n^5+3n+4 е равно на $256=2^8$ и това също е решение на задачата. При $n=7$ числото $n^4-n^3+n^2-n+4$ е равно на $2^3 \cdot 263$. Следователно $n=7$ не е решение на задачата. **(1 т.)**

Задачите са предложени, както следва:
зад. 8.1 – Чавдар Лозанов, зад. 8.2 и зад. 8.3 – Светлозар Дойчев и Сава Гроздев